Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Докажите иррациональность числа e.

   а) Докажите, что при целых a, b величина $ae + be^{-1}$ не является целой. Выведите из этого, что e не является квадратичной иррациональностью.

   б) Усовершенствовав рассуждение, докажите, что e не является алгебраическим числом четвёртой степени.

   в) Рассмотрим интеграл
$$I_n = q^{2n} \int_0^{\pi} (x(\pi - x))^n.$$

Докажите, что $I_n > 0$, $I_n \to 0$ при $n \to \infty$ и если $\pi = p/q$, где p, q — целые числа, то I_n — целое число. Выведите отсюда иррациональность числа π.

г) Докажите иррациональность числа e^n при любом целом n.

(*Фольклор*)

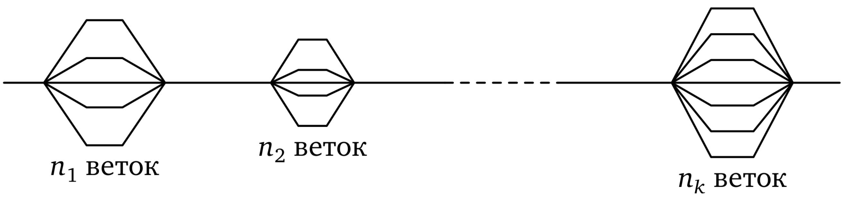
2. Докажите, что некоторое сечение тора является парой окружностей. (*Л. Радзивиловский*)

3. Дан эллипс с фокусом F. Найдите геометрическое место проекций F на хорды, видные из F под фиксированным углом.

(*А. Заславский, по мотивам А. Сгибнева*)

4. Дано натуральное число n, не являющееся полным квадратом. Назовём *хорошими* числа вида $a + b\sqrt{n}$, где a и b рациональные. При каком условии хорошее число можно представить в виде суммы квадратов нескольких хороших чисел? (*Фольклор*)

5. Схема железнодорожного узла имеет следующий вид:



Справа к узлу приближается состав из m локомотивов, которые могут двигаться лишь справа налево, при этом на одной ветке может уместиться любое число локомотивов. При каком наибольшем m локомотивы при прохождении через узел могут перестроиться в любом порядке? (*Фольклор*)

6. Дана матрица размера $k \times 667$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{667}$. Известно, что в разности между любыми двумя различными строками каждый остаток $x \in \mathbb{Z}_{667}$ встречается ровно k раз. Докажите, что то же самое верно и для столбцов. (*А. Я. Канель-Белов*)

7. Перестановке (биекции) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отвечает преобразование рядов:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \to \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}.$$

Назовём перестановку *полезной*, если она может преобразовать расходящийся ряд в сходящийся, и *зловредной*, если она может преобразовать сходящийся ряд в расходящийся.

а) Существует ли полезная и не зловредная перестановка?

б) Назовём перестановку *могучей*, если она может преобразовать сходящийся ряд в сходящийся, но с другой суммой. Верно ли, что могучая перестановка является и полезной и зловредной? Верно ли, что полезная и зловредная перестановка является могучей?

(*М. Л. Гервер*)

8. Многочлены P, Q с целыми коэффициентами степени ровно n не имеют общих корней, $R(x) = P(x)/Q(x)$. Натуральное число q есть *знаменатель* $d(\alpha)$ рационального числа α, если $\alpha = p/q$, дробь p/q несократима, $d(0) = 1$. Докажите, что существует такая величина $C(R) > 0$, зависящая только от R, что при всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $d(R(\alpha)) > C(R) \cdot d(\alpha)$. (*С. Ленг «Алгебра»*)

9. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два графа, у каждого счётное число вершин, и каждое ребро в этих графах проводится случайно и независимо с вероятностью $1/2$. С какой вероятностью графы изоморфны?

(*И. В. Митрофанов*)

10. а) Можно ли прямую представить в виде счётного объединения непересекающихся замкнутых ограниченных множеств?

(*Фольклор*)

б) Существует ли бесконечное семейство замкнутых множеств диаметра меньше единицы каждое, покрывающих плоскость, причём никакие 3 из них не имеют общей точки? (*Л. Радзивиловский*)

11. Дан звёздный n-угольник. (Многоугольник называется *звёздным*, если внутри него имеется точка, из которой видны все вершины.) Если он не выпуклый, то берутся две его стороны, образующие впадину (т. е. внутренний угол между которыми больше $180°$), на них строится параллелограмм и присоединяется к многоугольнику. Эта операция повторяется с полученным многоугольником и т. д.

а) Докажите, что за конечное число шагов получится выпуклый многоугольник, и оцените максимально возможное число шагов.

б) Рассмотрим аналогичный процесс, когда впадина «переворачивается», т. е. её стороны отражаются относительно прямой, соединяющей её концы. Может ли при этом многоугольник перестать быть звёздным?

в) Предположим, что процесс из п. б) организован так, что многоугольник остаётся звёздным. Может ли он продолжаться бесконечно? Тот же вопрос, если отказаться от условия «звёздности».

(*А. Я. Канель-Белов*)

12. Известно, что $a^2+b^2=4$ и $cd=4$. Покажите, что $(a-d)^2+(b-c)^2 \geqslant \frac{8}{5}$. (*Фольклор*)

13. Треугольник разрезан на выпуклые многоугольники так, что каждая прямая пересекает не более 10 из них. Может ли их количество быть сколь угодно большим? (*С. Г. Слободник*)

14. На какое а) минимальное, б) максимальное число частей могут разбить пространство n полуплоскостей? Аналогичный вопрос для k-мерного случая. (*А. Я. Канель-Белов*)

    в) На какое число частей разбивают k-мерное пространство n гиперплоскостей общего положения? (*Фольклор*)

15. а) Рассматривается последовательность первых цифр степеней двойки 1248136125... Каково количество различных подслов длины 13?

    б) Рассматривается последовательность W первых цифр чисел вида 2^{n^2}: 1215636... Докажите, что существует такой многочлен $P(k)$, что для всех достаточно больших k количество всех различных подслов в W длины k есть в точности $P(k)$. (*А. Я. Канель-Белов*)